Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Abr-Jul 2024
Matemáticas III (MA-1116) - Sección 2
3er Examen Parcial (35 %)
Modelo D

Nombre y Apellido: **Carnet:**

1. (Valor: 4 puntos) Demuestre que los vectores v_i forman una base ortogonal B, luego expresar el vector w como una combinacion lineal de dichos vectores v_i y proporcionar el vector coordenada $[w]_B$
$$v_1 = (1,1,1)^t \;;\; v_2 = (2,-1,-1)^t \;;\; v_3 = (0,1,-1)^t \;;\; w = (1,2,3)^t$$

2. (Valor: 4 puntos) Sean B_1 y B_2 dos bases dadas en $\mathbb{M}_{22}$. Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, luego escribir la matriz A de la base B_1 a la base B_2.
$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&1\\0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1\\1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0\\1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1\\1&0 \end{pmatrix} \right\} \;;\; B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1\\0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0\\1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1\\1&0 \end{pmatrix} \right\} \;;\; A = \begin{pmatrix} 1&1\\0&1 \end{pmatrix}$$

3. (Valor: 9 puntos) COMPLEMENTO ORTOGONAL

   a.- (Valor: 4 puntos) Encontrar el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W y proporcionar una base para $W^{\perp}$.
   $$W = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

   b.- (Valor: 5 puntos) Encontrar la descomposicion ortogonal del vector v cono respecto a W.
   $$v = (2,-2)^t \;;\; W = gen\{(1,3)^t\}$$

4. (Valor: 9 puntos) ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y PROYECCIONES

   a.- (Valor: 4 puntos) Sea $\langle u, v\rangle$ un producto interno. Demuestre que la proposicion dada es una identidad.
   $$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

   b.- (Valor: 5 puntos) Aplique el método de Gram - Schmidt a la base B para obtener una base ortonormal para el espacio con producto interno V relativo al producto interno dado.
   $$V = \mathbb{P}_2 \;;\; B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\} \;;\; \langle p(x), q(x)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + c_1c_2,$$

5. (Valor: 9 puntos) TRANSFORMACIONES LINEALES

   a.- (Valor: 4 puntos) Sea $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{R}$ una transformación lineal para la cual $T\left[\begin{pmatrix} 1&0\\0&0 \end{pmatrix}\right] = 1$, $T\left[\begin{pmatrix} 1&1\\0&0 \end{pmatrix}\right] = 2$, $T\left[\begin{pmatrix} 1&1\\1&0 \end{pmatrix}\right] = 3$ y $T\left[\begin{pmatrix} 1&1\\1&1 \end{pmatrix}\right] = 4$. Encontrar $T\left[\begin{pmatrix} 1&3\\4&2 \end{pmatrix}\right]$ y $T\left[\begin{pmatrix} a&b\\c&d \end{pmatrix}\right]$.

   b.- (Valor: 5 puntos) Hallar la matriz de transformación A_T para la transformación lineal $T : V \to W$ con respecto a las bases canónicas en V y W Luego escribir el vector $v \in V$ en términos del espacio W utilizando la matriz de transformación A_T.
   $$T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{M}_{22} \;;\; T[A] = A^t \;;\; v = \begin{pmatrix} a&b\\c&d \end{pmatrix}$$